Semaine des mathématiques 2024

Aide à la mise en œuvre des photo-défis
Eléments de correction pour le Cycle 3

RESPECT : SOYONS FAIR-PLAY, SERRONS-NOUS LA MAIN AU HANDBALL !

Objectif

Il s'agit d'un problème qui amène la formulation d'une conjecture et la production de preuve. C'est un problème qui propose différentes stratégies de résolution (*cf Stratégies pouvant être mises en jeu dans la résolution du défi*). Ce problème correspond aux problèmes de type « les rangements de livres sur une étagère, les dispositions de personnes autour d'une table… » qui permettent aux élèves d'approcher l'analyse combinatoire.

Compétences travaillées

- **Toutes les compétences :**

Il s'agit d'un problème qui amène la formulation d'une conjecture et la production de preuve. C'est un problème qui propose différentes stratégies de résolution (*cf Stratégies pouvant être mises en jeu dans la résolution du défi*). Ce problème correspond aux problèmes de type « les rangements de livres sur une étagère, les dispositions de personnes autour d'une table… » qui permettent aux élèves d'approcher l'analyse combinatoire

Matériel

La fiche « photo-défi » est indispensable pour résoudre les problèmes.

Difficultés liées à cette activité

- Commun à tous les niveaux : l'élève doit prendre en compte le fait qu'un joueur ne se serre pas la main lui-même ainsi que le dernier joueur qui lui, a serré la main de tous les autres.
- Les termes « coéquipiers », « adversaires » et « adverse » doivent être explicités afin de lever toute ambiguïté. De plus, le terme « salue » équivaut à une poignée de main
- Pour les niveaux supérieurs, l'élève doit également prendre en compte le nombre total d'arbitres qui n'est pas mentionné dans l'énoncé, mais qui figure sur la photo.
- Concernant le degré de difficulté 3, la prise en compte collective des poignées de main n'est plus valable. Chaque individu serre la main à tous les autres adversaires. Puis l'ensemble des joueurs serre la main aux arbitres : cela implique une autre modélisation.

<u>Point de vigilance</u> : Dans chaque équipe il y a 7 joueurs <u>dont</u> le gardien de but.
Il porte un maillot vert pour l'équipe espagnole et un maillot jaune pour l'équipe française.

Degré de difficulté 1

A l'issue d'un match de handball entre la France et l'Espagne, tout le monde se serre la main. Chaque joueur salue ses adversaires et ses coéquipiers. Combien de poignées de main seront données en tout ?

On considère dans le premier défi que 14 personnes sont impliquées dans la situation : 7 joueurs français et 7 joueurs espagnols.

Le premier joueur serre la main aux 13 autres, cela représente 13 poignées de main. Le second joueur a déjà serré la main au premier, il ne lui reste donc que 12 poignées de main à donner… etc… jusqu'au dernier joueur qui a déjà serré la main à toutes les personnes.

On multiplie donc le nombre de poignées de main possible (n – 1) par la moitié du nombre de personnes. La situation peut se représenter mathématiquement par l'opération suivante :

$$\frac{n}{2} \times (n-1)\ ou\ \frac{n^2-n}{2}$$

Pour 14 personnes qui se serrent la main, nous avons donc :

$\frac{14}{2} \times (14-1)=$ **7 x 13 = 91** ou $\frac{14^2-14}{2}\ ou\ \frac{196-14}{2}$ = **182 : 2** = **91**

Pour les élèves, l'utilisation de l'addition sera privilégiée :

13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **91 poignées de main.**

Degré de difficulté 2

A l'issue d'un match de handball entre la France et l'Espagne, tout le monde se serre la main. Chaque joueur salue ses adversaires, ses coéquipiers et les arbitres. Combien de poignées de main seront données en tout ?

On considère dans le second défi que 16 personnes sont impliquées dans la situation : 7 joueurs français, 7 joueurs espagnols et 2 arbitres.

Pour 16 personnes qui se serrent la main, nous avons donc :

$\frac{16}{2} \times (16-1)=$ **8 x 15 = 120** ou $\frac{16^2-16}{2}\ ou\ \frac{256-16}{2}$ = **240 : 2** = **120**

Pour les élèves, l'utilisation de l'addition sera privilégiée : 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **120 poignées de main.**

Degré de difficulté 3

A l'issue d'un match de handball entre la France et l'Espagne, chaque joueur serre la main des joueurs de l'équipe adverse. Puis tous les joueurs saluent les arbitres. Combien de poignées de main seront données en tout ?

On considère dans le troisième défi que 16 personnes ne sont pas impliquées de la même manière que dans les situations précédentes : d'un côté, nous avons 7 joueurs français qui serrent la main aux 7 joueurs espagnols et de l'autre côté, les 14 joueurs français et espagnols serrent la main aux 2 arbitres.

On multiplie donc le nombre de poignées de main de chaque joueur par le nombre de personnes. La situation peut se représenter mathématiquement par l'opération suivante :

$$n \times n + (2n \times 2) \quad ou \quad n^2 \times (2n \times 2)$$

Pour 7 personnes nous avons donc :

7 x 7 + 2 x 7 x 2 = 49 + 14 x 2 = 49 + 28 = **77 poignées de main.**

Pour les élèves, l'utilisation de l'addition sera privilégiée: 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 14 + 14 = **77 poignées de main.**

Stratégies pouvant être mises en jeu dans la résolution des défis

Exemple de stratégies : « *Douze enfants s'échangent des poignées de main, chacun à chacun une seule fois. Combien y a-t-il de poignées de main ? »*

Voici 16 stratégies :

Stratégie 1. Écrire une phrase mathématique. **Stratégie d'application** → Le 1er enfant donne 11 poignées, le 2e en donne 10, le 3e en donne 9, etc. La phrase mathématique est : 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66. Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 2. Utiliser une formule. **Stratégie d'application** → Soit n le nombre d'enfants et m le nombre de poignées, la formule est : $m = n(n - 1)/2$. Si $n = 12$, alors $m = 12 \times 11 \div 2 = 66$. D'où, 66 poignées.

Stratégie 3. Faire une fausse supposition. **Stratégie d'enchaînement logique** → On suppose que chaque enfant reçoit 12 poignées de main : ce qui ferait 12 × 12 ou 144 poignées. Un enfant ne peut pas se donner la main. D'où, 144 - 12 = 132 poignées. Deux mains tendues équivalent à une poignée. D'où, 132 ÷ 2 = 66 poignées.

Stratégie 4. Procéder par analogie. **Stratégie d'enchaînement logique** → Un élève a déjà résolu le problème : « Huit enfants s'échangent mutuellement des cadeaux. Combien de cadeaux ont été donnés ? » Il avait fait le raisonnement suivant. Chacun des 8 enfants reçoit 7 cadeaux : ce qui fait 8 × 7 = 56 cadeaux. Si l'élève a bien évoqué le problème des poignées, il divisera le produit par 2, car il faut 2 mains pour définir une poignée. Il va donc multiplier 12 par 11 et diviser le résultat par 2 : ce qui donne 66 poignées.

Stratégie 5. Procéder par déduction. **Stratégie d'enchaînement logique** → Chaque enfant donne 11 poignées. Chaque enfant en reçoit 2. On multiplie 12 par 11 et on divise par 2. Il y a 66 poignées.

Stratégie 6. Utiliser des jetons. **Stratégie d'expression physique** → On prend 12 jetons. On y écrit 12 noms d'enfants. Pour éviter les erreurs, on procède de façon ordonnée en utilisant le comptage et le calcul. On place les jetons en ligne. On associe le premier jeton à chacun des 11 autres : cela fait 11 contacts. On associe le deuxième jeton à chacun des dix autres de droite : cela fait 10 contacts. On procède selon le même algorithme jusqu'à l'avant-dernier jeton. Il reste à faire la somme des entiers consécutifs de 1 à 11. Il y a 66 contacts ou poignées.

Stratégie 7. Utiliser des objets. **Stratégie d'expression physique** → Les objets représentent les enfants. On place les objets en ligne. On procède comme dans la stratégie précédente.

Stratégie 8. Vivre la situation en gestes. **Stratégie d'expression physique** → On place 12 enfants en ligne. On demande au 1er enfant de donner une poignée à chacun. On procède comme dans les deux stratégies précédentes. On pourrait aussi demander à chaque enfant de la file de compter le nombre de poignées qu'il reçoit. Le 2e enfant en reçoit 1, le 3e en reçoit 2 et ainsi de suite.

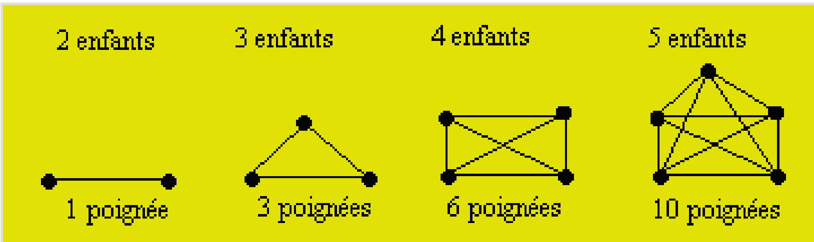
Stratégie 9. Consulter une table. **Stratégie de recherche** → Un élève a noté que le nombre de poignées, quand il y a 2, 3, 4, 5, ... enfants, était un nombre triangulaire dont le rang correspond au nombre d'enfants moins l'unité. Il consulte la table des nombres triangulaires et trouve que le 11e nombre triangulaire est 66. Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 10. Rechercher les combinaisons. **Stratégie de recherche** → Les enfants sont notés de A à L. On écrit les combinaisons : (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (A, G), (A, H), (A, I), (A, J), (A, K), (A, L), (B, C), (B, D), (B, E), etc. On en a 11 qui commence par A, 10 par B, 9 par C, ... etc. Cela donne 66 poignées.

Stratégie 11. Rechercher une formule. **Stratégie de recherche** → On pose qu'il y a n enfants. Chacun donne $(n - 1)$ poignées de main. Cela va donner $n(n - 1)$ poignées. Quand un enfant donne et l'autre reçoit, cela compte pour une poignée. Le nombre de poignées est 2 fois trop grand. D'où, il y a $n(n - 1)/2$ poignées. En remplaçant n par 12, on obtient 66.

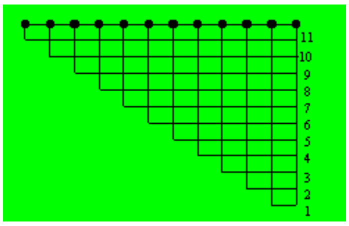
Stratégie 12. Rechercher une règle. **Stratégie de recherche** → Par exemple, il y a 3 enfants. Chaque enfant donne et reçoit 2 poignées : ce qui fait (3 × 2)/2 ou 3 poignées. Par exemple, il y a 4 enfants. Cela fait (4 × 3)/2 ou 6 poignées. Par exemple, il y a 6 enfants. Cela fait (6 × 5)/2 ou 15 poignées. S'il y a 12 enfants, on peut écrire (12 × 11)/2 ou 66 poignées.

Stratégie 13. Construire des modèles. **Stratégie de représentation** → On trouve le nombre de poignées successivement pour 2, 3, 4 et 5 enfants.



La différence entre le nombre de poignées du 2e diagramme et du 1er est 2. La différence entre le nombre du 3e diagramme et du 2e est 3. La différence entre le nombre du 4e diagramme et du 3e est 4. À chaque fois qu'un enfant s'ajoute, le nombre de poignées augmente du nombre précédent d'enfants. D'où, les autres termes de la suite seront : 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66. Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 14. Construire un graphique. **Stratégie de représentation** → Chaque enfant est représenté par un point. Les points d'intersection représentent les poignées de main. Il reste à additionner les nombres de 1 à 11. Il y a 66 poignées de main.



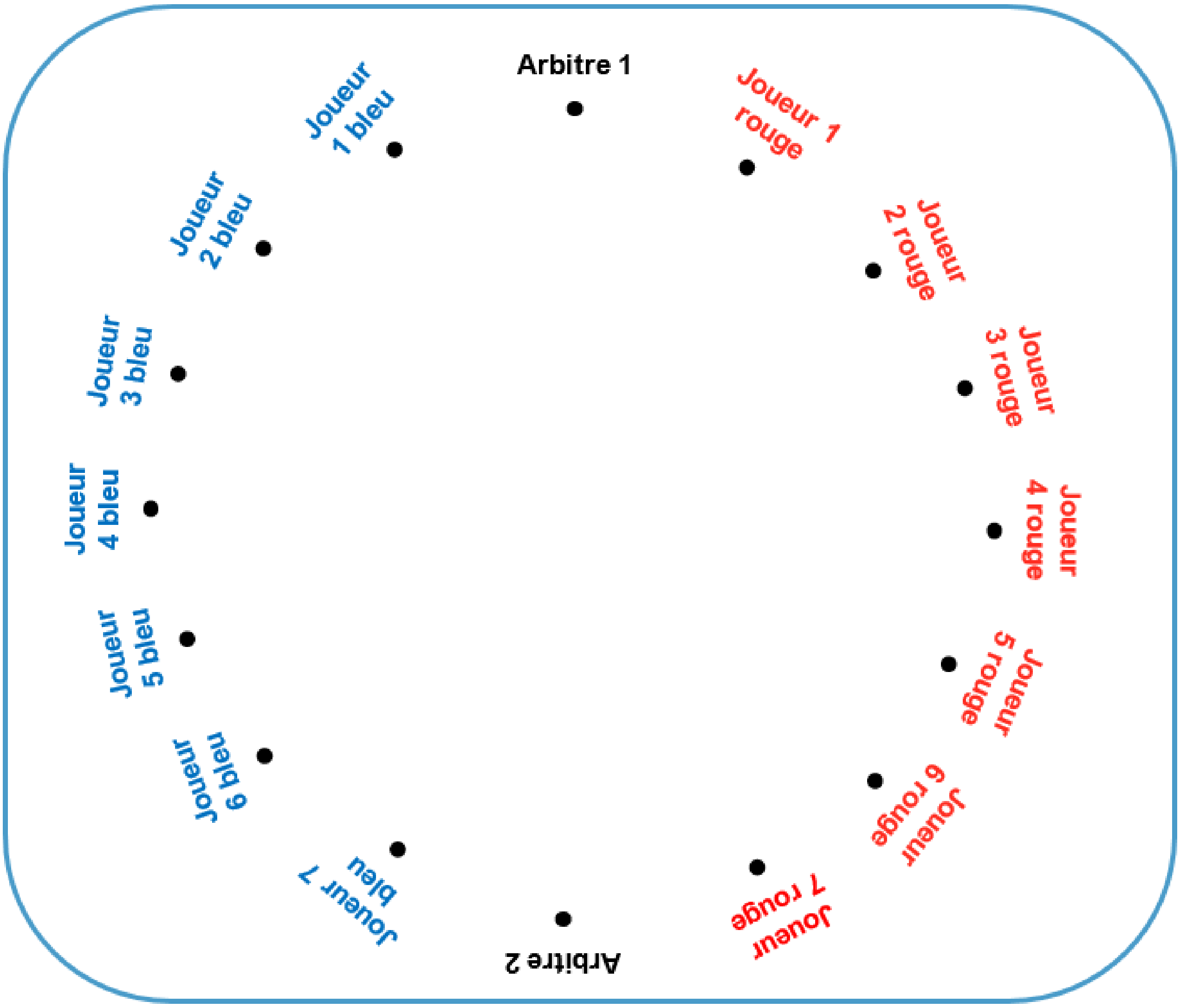
Stratégie 15. Construire un tableau. **Stratégie de représentation**

Enfants	2	3	4	5	6
Poignées	1	3	6	10	15

Pour 2 enfants, le nombre de poignées de main est 1. → Pour 3 enfants, ce nombre est 1 + 2.; Pour 4 enfants, ce nombre est 1 + 2 + 3.; Pour 5 enfants, ce nombre est 1 + 2 + 3 + 4.: Pour 12 enfants, il sera : 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10 + 11 = 66.

Stratégie 16. Décomposer en sous-problèmes **Stratégie de représentation** → On partage les enfants en deux groupes de six enfants. À l'intérieur de chaque groupe, 15 poignées sont données. Les enfants des deux groupes se donnent la main. Cela fait 6 × 6 = 36 poignées. Il y a (2 × 15 + 36) ou 66 poignées de main.

Outil de manipulation:



Exemple de schéma pouvant être proposé aux élèves

RUGBY À 7 : LE MEME TERRAIN QUE POUR LE RUGBY À XV !

Du côté historique

L'histoire olympique du rugby s'étale sur plusieurs périodes :

- Une première, vers la rénovation des JO où il se pratiquait à quinze avec 4 tournois en 1900, 1908, 1920 et 1924
- Depuis les Jeux de Rio, en 2016, le rugby fait son grand retour sur la scène olympique dans sa version à sept joueurs pour des tournois féminin et masculin disputés par 12 équipes chacun.

C'est l'équipe masculine des Fidji qui a remporté la médaille d'or à Rio et à Tokyo. La prometteuse équipe de France U18 championne d'Europe en 2021 sera-t-elle présente au rendez-vous parisien ?

Du côté féminin, c'est l'Australie qui remporte la médaille d'or à Rio et la Nouvelle-Zélande à Tokyo en battant l'équipe de France féminine en finale. Un nouvel espoir de médaille pour l'équipe de France féminine au Stade de France ?

Points de vigilance :

- Document composite
- La représentation du terrain (par ex : la ligne de ballon mort n'est indiquée que sur un coté du terrain alors qu'elle est également présente de l'autre côté du terrain)

« Les notions de grandeurs et de mesure de la grandeur se construisent dialectiquement, en résolvant des problèmes faisant appel à différents types de tâches (comparer, estimer, mesurer). Dans le cadre des grandeurs, la proportionnalité sera mise en évidence et convoquée pour résoudre des problèmes dans différents contextes.

Dans la continuité du cycle 2, le travail sur l'estimation participe à la validation de résultats et permet de donner un sens concret aux grandeurs étudiées et à leur mesure (estimer en prenant appui sur des références déjà construites : longueurs et aire d'un terrain de basket […]. » *Programme du Cycle 3 - BOEN n°31 du 30 juillet 2020*

Objectif

- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux

Compétences travaillées

- **Chercher**, par ex. prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir d'une représentation graphique du terrain de rugby
- **Modéliser**, par ex. reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité
- **Représenter**, par ex. analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour, lignes et points
- **Raisonner**, par ex. résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement
- **Calculer**

Matériel

- La fiche « photo-défi » indispensable pour résoudre les problèmes

Difficultés liées à cette activité

- Lire la représentation graphique du terrain de rugby : comprendre où sont les lignes nommées, interpréter la distance entre deux points, distance représentée par les flèches, visualiser les surfaces évoquées (en-but, zone centrale entre deux lignes)
- Apprendre à organiser sa recherche

Degré de difficulté 1 : Résoudre un problème impliquant des longueurs

Pour s'échauffer, Paulin a l'habitude de faire des allers-retours entre sa ligne d'en-but et sa ligne des 22 m. Lors de son échauffement pour le 1er match du tournoi olympique, il fait 10 allers-retours entre ces deux lignes. Quelle distance a-t-il parcourue ?

Paulin (Riva), actuel capitaine de l'équipe de France effectue 10 allers-retours pour s'échauffer.

Les points de vigilance au niveau de la compréhension du problème :

- Comprendre qu'en faisant un aller-retour on double la distance parcourue. Ce double pourra apparaitre en début de raisonnement ou en fin de raisonnement.
- Visualiser les deux lignes considérées (ligne d'en-but et ligne des 22 m) et interpréter la distance entre ces deux lignes : on appelle distance entre deux droites la plus petite distance qui sépare deux points sur chacune des deux droites. Dans le plan, cette distance est nulle sauf si les deux droites sont parallèles. Dans ce cas, la distance est la longueur de n'importe quel segment (il y en a une infinité) perpendiculaire à ces droites et qui joint deux points sur chacune des droites (c'est le trajet de Paulin).

La distance entre les deux lignes est de 22 m (raison pour laquelle la ligne se nomme ligne des 22 m). Paulin la parcourt 10 fois dans le sens « aller » et 10 fois dans le sens « retour » donc : 22 m x 10 x 2 = **440 m**.

Degré de difficulté 2 : Résoudre un problème impliquant la notion d'aire

Après le premier match du tournoi olympique, la pelouse du terrain est endommagée. Le jardinier du Stade de France doit commander urgemment une nouvelle pelouse pour la zone centrale du terrain, c'est-à-dire celle comprise entre les deux lignes des 22 mètres. Quelle surface de pelouse doit-il commander ?

Ce problème permet d'investir la notion d'aire en se servant de l'usure de la pelouse. Il sera donc possible d'envisager un prolongement avec l'achat du gazon qui permettra de rénover cette pelouse.

Les points de vigilance au niveau de la compréhension du problème :

- Comprendre que la zone que nous nommons centrale est la zone délimitée par les deux lignes des 22 m.
- Comprendre le lien entre surface et aire

Pour calculer cette surface, une donnée est manquante : la largeur de cette zone centrale.

La ligne de touche mesurant 100 m, il faut enlever 2 fois la longueur de la ligne des 22 m soit 100 m – 22 m x 2 = 56 m. Avec cette largeur, on peut calculer l'aire de cette zone : 56 m x 70 m = 3920 m^2. Le jardinier doit donc commander **3920 m^2** de pelouse.

Prolongement(s) possible(s) :
Imaginons que cette pelouse soit vendue en rouleaux. Les pelouses sont conditionnées en rouleaux de largeur 4 m ou 6 m.

Quel conditionnement choisir pour éviter des découpes ?

Les pelouses sont conditionnées en rouleaux de largeur 2 m, 4 m ou 6 m.
Quel conditionnement choisir pour éviter au maximum les jointures ?

On peut ensuite envisager des grandeurs économiques en demandant de calculer le coût de cette rénovation. Il suffit d'attribuer un prix aux différents rouleaux : une variable peut résider dans le fait de donner un prix au mètre linéaire ou un prix au m^2.

Conditionnement	Prix au mètre linéaire	Prix au m^2
En rouleaux de 2 m de large		
En rouleaux de 4 m de large		
En rouleaux de 6 m de large		

On peut imaginer également que les rouleaux sont des rectangles définis par une longueur et une largeur. Il s'agira alors de faire un pavage du terrain.

Degré de difficulté 3 : Résoudre un problème impliquant des longueurs (la notion de périmètre est sous-jacente)
Au rugby, la largeur de la zone d'en-but peut varier de 10 m à 22 m. Lors de son échauffement, Carla fait 10 fois le tour du terrain (qui comprend les zones d'en-but). Elle parcourt ainsi 4 km. Trouve la largeur de la zone d'en-but du terrain.

Dans le milieu du sport, les dimensions des terrains sont parfois définies de manière fixe comme au basket et parfois c'est un encadrement de la longueur qui est donnée, comme au football ou au rugby. L'idée de ce problème est donc de se servir de cet encadrement de la largeur de la zone d'en-but : entre 10 m et 22 m.

Les points de vigilance au niveau de la compréhension du problème :
- Comprendre que la zone d'en-but fait partie du terrain ce qui implique que le tour du terrain inclut de passer par la ligne de ballon mort : aider les élèves à visualiser le tour du terrain

En faisant 10 fois le tour du terrain, Carla parcourt le périmètre du terrain 10 fois. Sachant qu'elle parcourt 4 km soit 4000 m, le périmètre du terrain est donc 400 m (4000 m : 10 = 400 m). Le périmètre du terrain est composé des longueurs suivantes :

- 2 fois la ligne de touche d'une longueur de 100 m
- 2 fois la ligne de ballon mort d'une longueur de 70 m
- 4 fois la largeur de la zone d'en-but

Ainsi, 400 m – 70 m x 2 – 100 m x 2 = 60 m. Cette distance de 60 m correspond à la longueur des quatre largeurs de la zone d'en-but : 60 m : 4 = 15 m. Donc la largeur de la zone d'en-but mesure **15 m**.

LA PISCINE OLYMPIQUE

Degré de difficulté 1

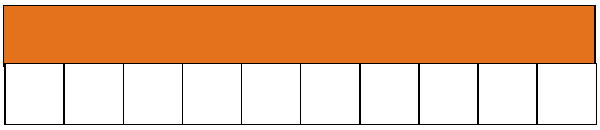
Ce bassin olympique mesure 25 mètres de largeur. Quelle est la largeur de chaque couloir de nage?

Il s'agit ici de résoudre un problème multiplicatif de type division partition (recherche de la valeur d'une part).

L'analyse de la photo doit permettre aux élèves de repérer que la largeur de la piscine est partagée en 10 couloirs de mesure identique.

Point de vigilance : définir éventuellement ce qu'est un couloir de natation avec les élèves.

Il est possible de schématiser la situation (par le dessin ou à l'aide des réglettes Cuisenaire)



1er couloir	2e couloir	3e couloir	4e couloir	5e couloir	6e couloir	7e couloir	8e couloir	9e couloir	10e couloir
? m	? m	? m	? m	? m	? m	? m	? m	? m	? m

25 m

Ainsi, les élèves sont amenés à comprendre que les 25 mètres de la largeur de la piscine sont partagés en 10 couloirs de mesure identique. Ils doivent donc chercher quelle est la largeur de chaque couloir.
25 m : 10 couloirs = 2,5 m
Chaque couloir mesure donc 2,5 mètres de large.

Degré de difficulté 2

Sachant que le périmètre d'un bassin olympique mesure 150 m, quelle est la mesure de sa longueur ? Quelle est l'aire d'un bassin olympique ?

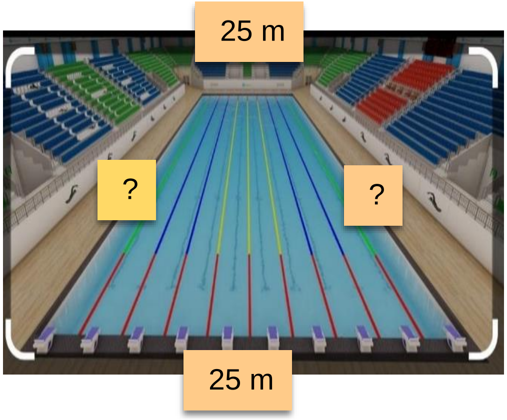
Etape 1 : Recherche de la longueur de la piscine olympique

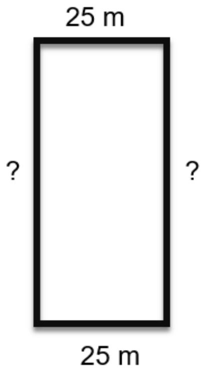
- Les élèves doivent savoir que le périmètre d'un polygone correspond à la somme des longueurs de chacun de ses côtés.
- Ils doivent également savoir que la piscine est rectangulaire et connaitre les propriétés du rectangle, à savoir, qu'il s'agit d'un polygone à 4 côtés dont les côtés opposés sont de même longueur. Ici, contrairement au carré (rectangle particulier), la longueur et la largeur ont des mesures différentes.

A partir de ces connaissances, les élèves déduisent que pour obtenir le périmètre de la piscine, ils ont besoin de la mesure de sa largeur **et** de sa longueur. Grâce à l'énoncé du défi 1, ils savent déjà que la largeur mesure 25m.

Ils savent également que dans un rectangle, il y a deux côtés qui sont des largeurs (les deux côtés opposés les moins longs).

<u>Les élèves peuvent s'aider en dessinant un rectangle à main levée</u> (ou sur une feuille quadrillée pour éviter l'utilisation de matériel géométrique type équerre ou compas) ou <u>en notant directement les informations **sur** la photo du défi</u>.





<u>La situation peut aussi être représentée par des schémas en barre</u> :

Schéma 1

**En représentant le calcul suivant : Périmètre de la piscine = ? + 25 + ? +25*

?	25 m	?	25 m

150 m

Schéma 2

**En représentant le calcul issu de la formule du périmètre d'un rectangle* (2 variables possibles)

Périmètre de la piscine = (Longueur + largeur) x 2

150 m = (? m + 25 m) x 2

? m	25 m
? m	25 m

150 m

Schéma 3

Périmètre de la piscine = (Longueur x 2) + (largeur x 2)

150 m = (? m x 2) + (25 m x 2)

? m	? m	25 m	25 m
? m		25 m x 2 = 50 m	

150 m

A partir de ces observations et en prenant en compte leur connaissance de ce qu'est le périmètre d'un rectangle (la sommes des deux longueurs et des deus largeurs), les élèves peuvent avoir recours à plusieurs procédures.

Ils peuvent, soit écrire et effectuer les différents calculs, soit faire les calculs mentalement en mobilisant leurs connaissances de certains faits numériques (le double de 25 et la moitié de 100)

Dans les deux cas, il s'agit pour eux de résoudre un problème à plusieurs étapes (le schéma 3 semble être le plus propice pour modéliser et expliciter la situation avec les élèves si besoin).

Les élèves peuvent d'abord déduire ou calculer que la mesure totale des deux largeurs est de 50 m (25 m x 2) : *problème de partie-tout* *dont on cherche le tout*

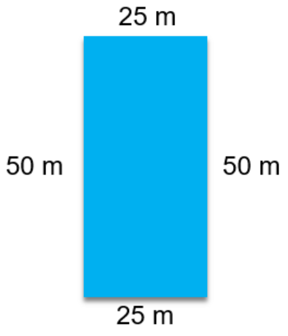
Ils peuvent ensuite calculer ou trouver mentalement que la mesure totale des deux longueurs est de 100 m (150 m – 50 m) : *problème de partie-tout* *dont on cherche l'une des deux parties*

Enfin, ils peuvent, par le calcul ou mentalement, trouver la mesure de la longueur du bassin

(100 m : 2 = 50 m) : *problème de division partition*

Etape 2 : Recherche de l'aire de la piscine olympique

- Les élèves doivent savoir que l'aire d'un polygone correspond à la mesure de sa surface (représentée en bleu ci-dessous)
- Ils ont précédemment admis que la piscine olympique était rectangulaire. N'ayant pas de quadrillage à leur disposition, ils doivent connaitre et savoir appliquer la formule de l'aire d'un rectangle.
- La formule nécessite de connaitre la longueur et la largeur du bassin.
- Point de vigilance : les élèves doivent connaitre les unités de mesure d'aire (le mètre carré = m^2)



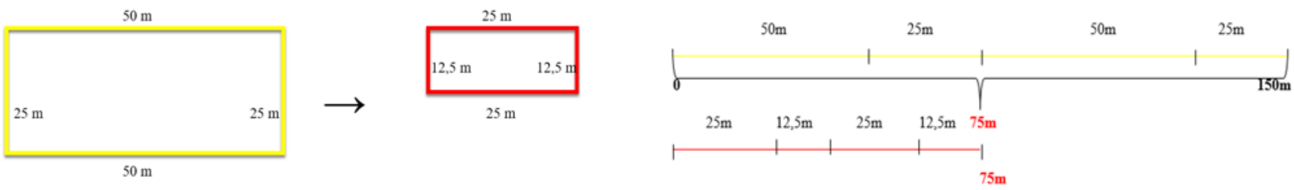
Aire de la piscine = Longueur x largeur
= L x l
= 50m x 25m
= 1 250 m^2

Degré de difficulté 3
Le bassin d'entraînement est deux fois plus petit que celui de la piscine olympique. Trouve la valeur du périmètre et la valeur de l'aire du bassin d'entraînement.

Point de vigilance : Les élèves, de manière intuitive, vont probablement, dans un premier temps, vouloir diviser les mesures de la longueur et de la largeur par 2.

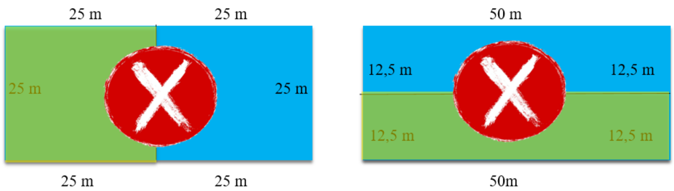
Cela fonctionnera pour le calcul du périmètre car effectivement la longueur totale des côtés du rectangle sera divisée par 2 (150m : 2 = 75m).

Représentation linéaire des périmètres (en jaune la figure initiale et en rouge la figure deux fois plus petite)

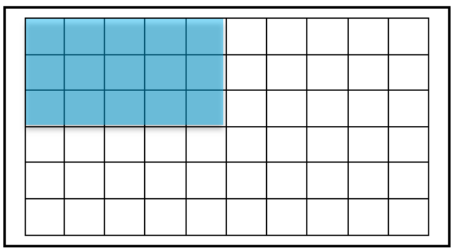


En revanche, cela ne fonctionnera pas pour l'aire car le résultat attendu est 312,5m² ; or en divisant l'aire de la figure initiale par 2 on obtient 625 m² (1250 m² : 2 = 625 m²).

Il faut les amener à comprendre, par le tracé (cf proposition ci-dessous), qu'il ne s'agit pas de partager la figure en 2 pour obtenir le résultat attendu (celui de l'aire), mais que « deux fois plus petit » signifie que chacun des côtés sera « deux fois plus petit » et que la forme initiale devra être conservée (ce qui ne sera pas le cas si le rectangle est partagé en 2). Il s'agit en effet d'une situation de proportionnalité.



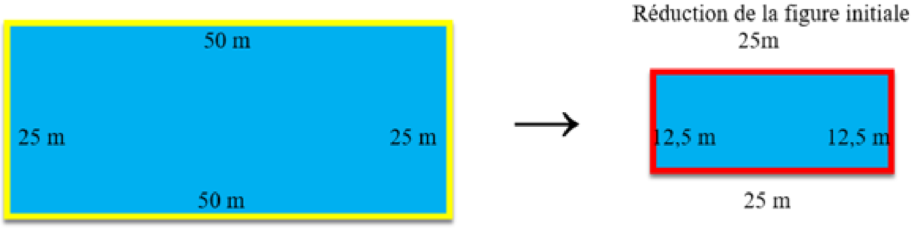
<u>Manipulation possible</u> : Tracer à l'aide d'un quadrillage un rectangle de 10 carreaux de longueur et 6 carreaux de largeur, puis tracer le même rectangle de manière à ce qu'il soit deux fois plus petit. Les élèves vont ainsi percevoir qu'ils doivent, pour obtenir la même figure, respecter les proportions et donc diviser la longueur de chacun des côtés par 2 (5 carreaux de Longueur et 3 carreaux de largeur).



Aire de la figure initiale = 10 carreaux x 6 carreaux
= 60 carreaux

Aire de la figure deux fois plus petite (figure bleue)
= 5 carreaux x 3 carreaux
= 15 carreaux

Si maintenant on calcule l'aire et le périmètre de la piscine avec la longueur de chacun des côtés « deux fois plus petite » (cf figures ci-dessous), nous obtiendrons les résultats suivants :



Périmètre = (25m + 12,5m) x 2
= 75 m

Aire = 25m x 12,5m
=312,5 m²

LE POIDS DES MEDAILLES

Objectif

Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité (pour les élèves de sixième)

Compétences travaillées

Chercher

- Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.
- S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques

Modéliser

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.

Raisonner

- Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Calculer

- Calculer avec des nombres décimaux et des fractions simples de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).

Point de vigilance :

- On pourra expliciter la **composition** des médailles d'or et de bronze, en s'appuyant sur un schéma ou sur une représentation analogique des fractions.

- Le mot « **alliage** » peut être utilisé et reformulé pour en assurer une bonne compréhension par les élèves.

- Il faudra veiller, lors de la mise en œuvre des procédures élèves et des échanges, à ce que la notion de **nombre de médailles d'or, d'argent et de bronze**, ne soit pas confondue avec la notion de **masse d'or, d'argent, etc**…

Degré de difficulté 1
Quelle masse de cuivre et de zinc faut-il pour fabriquer 2000 kg de médailles de bronze ?

Les élèves doivent analyser les informations fournies dans les documents et percevoir qu'elles sont de deux types :

- le poids de chaque sorte de médailles
- la composition de chacune d'elles

De quels métaux sont composées les médailles ?

	Médaille d'or	Médaille d'argent	Médaille de bronze
Compositions	$\frac{1}{10}$ d'or $\frac{9}{10}$ d'argent	$\frac{10}{10}$ d'argent	$\frac{19}{20}$ de cuivre $\frac{1}{20}$ de zinc

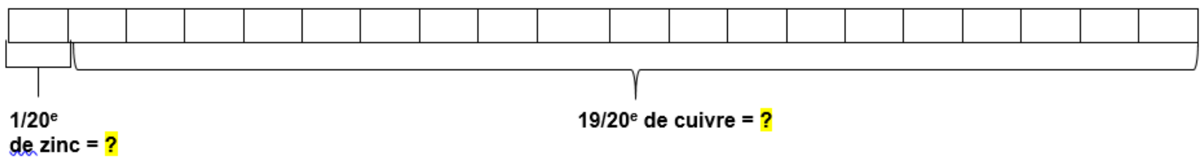
Pour répondre à cette question, la première difficulté pour les élèves, c'est qu'ils doivent faire abstraction de la première information (le poids de la médaille de bronze) qui n'est pas nécessaire pour trouver la masse de cuivre et de zinc de 2 000 kg de médailles de bronze.
En effet, pour trouver la réponse, les élèves doivent considérer uniquement les fractions relatives à la composition d'une unité de masse de médaille de bronze. Cela signifie que, quelle que soit la masse de départ, la proportion de bronze et de cuivre ne change pas (19/20ème de cuivre et 1/20ème de zinc pour une unité de masse) ; les proportions s'appliquent aussi bien pour le poids d'une médaille que pour le poids de 2 000 kg de médailles.

Ainsi, pour calculer la masse de cuivre et de zinc nécessaire à la fabrication de 2 000 kg de médailles de bronze, il faut calculer 1/20e de 2 000 kg pour connaître la masse de zinc et 19/20e de 2 000 kg pour connaître la masse de cuivre.

La deuxième difficulté pour les élèves sera de savoir comment calculer avec des fractions. **Deux procédures sont possibles** :

- **Procédure 1 :** Ils peuvent se représenter la masse totale (2 000 kg) comme étant l'unité à partager. Pour cela, ils peuvent utiliser un schéma.

2 000 kg de médailles



A partir de ce schéma, les élèves peuvent faire le lien avec des situations de partage déjà rencontrées en classe et qui nécessitent de calculer la valeur d'une part grâce à un division (situation de division partition).

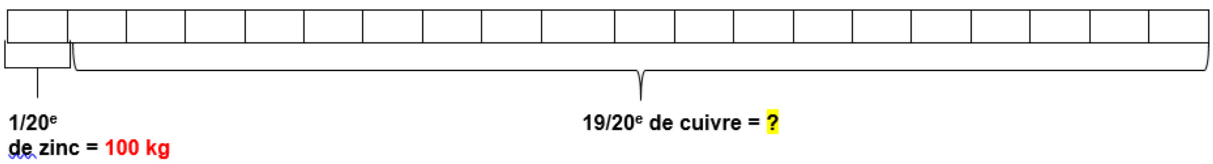
Ainsi, les élèves peuvent calculer la masse de zinc qui représente 1/20e de la masse totale, soit l'équivalent d'une part sur les 20 :
2 000 kg : 20 = 100

A partir de ce résultat, les élèves peuvent calculer les 19/20e de masse de cuivre :

- Soit en utilisant une soustraction en considérant que pour trouver la masse de cuivre il faut soustraire la masse de zinc à la masse totale.

2 000 kg – 100 kg = 1900 kg

2 000 kg de médailles



- Soit en utilisant une multiplication, en considérant que pour trouver les $19/20^{e}$ de masse de cuivre, c'est 19 fois plus que la masse de zinc qui représentait $1/20^{e}$
  100 kg x 19 = 1 900 kg

<u>Point de vigilance</u> : Il n'est pas attendu des élèves qu'ils utilisent l'opération suivante (technique experte)
2 000 kg x 19/20

- **Procédure 2 :** Les élèves peuvent directement considérer la répartition de cuivre ($19/20^{ème}$) et de zinc ($1/20^{ème}$) pour constituer 20 kilogrammes de bronze ($20/20^{ième}$).

Cela leur permettra d'obtenir les résultats suivants : 19 kilogrammes de cuivre et 1 kilogramme de zinc.

Ainsi pour 2000 kg de bronze, il leur faudra multiplier les quantités obtenues précédemment par 100. En effet, selon le principe de proportionnalité, 2 000 kg c'est 100 fois plus que 20 kg.

La masse de cuivre sera donc de 19kg x 100 = 1 900 kg et la masse de zinc sera de 1 kg x 100 = 100 kg.

<u>Degré de difficulté 2</u>

Quelle masse d'argent faut-il pour réaliser 1000 médailles d'or, 1000 médailles d'argent et 2000 médailles de bronze ?

Il s'agit ici d'un problème à plusieurs étapes. Il faut d'abord calculer la masse d'argent pour les 1 000 médailles d'or, les 1 000 d'argent et les 2 000 médailles de bronze. Il faut ensuite calculer la masse totale d'argent nécessaire pour fabriquer l'ensemble des médailles.

Pour cette question, les élèves doivent cette fois considérer la masse totale de chaque médaille, mais aussi la composition de chacune d'elles en prenant en compte la part d'argent qu'elles contiennent.

- **Masse d'argent pour les 1 000 médailles d'or**

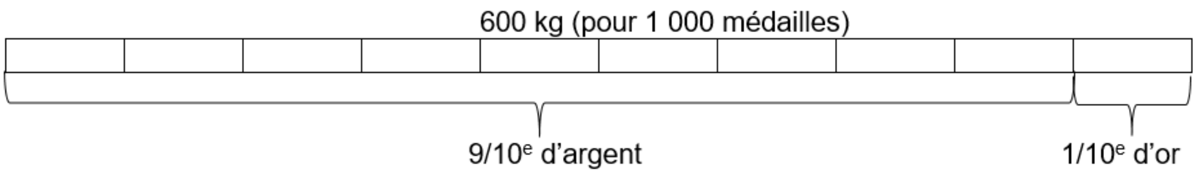
<u>Procédure 1 :</u>
Pour réaliser 1000 médailles d'or, il faut 600 kilogrammes d'alliage.

En effet, selon le principe de proportionnalité, sachant qu'une médaille d'or a une masse de 600g, 1 000 médailles d'or auront une masse 1000 fois plus grande que pour une seule médaille (600g x 1 000 médailles = 600 000 g = 600 kg).

A partir de ce calcul, sachant que les médailles d'or sont composées de $9/10^{ème}$ d'argent sur la totalité de leur masse, les élèves peuvent réfléchir de la manière suivante :

Pour 1 000 médailles, le poids total est de 600 kg et il faut, pour les fabriquer, $9/10^{e}$ d'argent.

Cela peut être représenté par un schéma.



L'unité à partager est donc de 600 kg et pour trouver la valeur de 9 parts sur 10, les élèves peuvent d'abord chercher la valeur d'une part (600 kg : 10 = 60 kg).

Ensuite, ils peuvent déduire que 9 parts, c'est 9 fois plus qu'une part et ainsi calculer la masse d'argent qui vaut 9/10^{e} de la masse totale (60 x 9 = 540 kg). Ils peuvent aussi déduire que les 9/10^{e} s'obtiennent en opérant une soustraction de la masse totale (600 kg) par la masse d'une part (1/10^{e} du total, soit ici la masse d'or) : 600 kg – 60 kg = 540 kg.

Procédure 2 :
Les élèves peuvent utiliser la même procédure que précédemment, mais en calculant d'abord la masse d'argent pour une seule médaille d'or, et en multipliant le résultat par 1000 afin d'obtenir le résultat pour 1000 médailles. Le résultat obtenu sera alors en grammes.

(9/10^{e} de 600 g = 540 g et 540 g x 1 000 = 540 000 g)

- **Masse d'argent pour les 1 000 médailles d'argent**

Les médailles d'argent étant constituées uniquement d'argent (10/10^{e} de leur masse totale), la masse totale d'une médaille est donc égale à la masse d'argent qui la compose. Ainsi, en appliquant le principe de proportionnalité, si une médaille d'argent pèse 500 g et qu'elle contient donc 500 g d'argent, la masse d'argent de 1 000 médailles sera 1 000 fois plus élevée :
500 g x 1 000 = 500 000 g = 500 kg

- **Masse d'argent pour les 2 000 médailles de bronze**

Les médailles de bronze ne contiennent pas d'argent ; pour réaliser 2000 médailles de bronze, il n'y a donc pas besoin d'argent !

- **Masse totale d'argent pour toutes les médailles**

Les élèves doivent additionner les masses d'argent nécessaires à la fabrication des 1 000 médailles d'or et des 1 000 médailles d'argent, soit :

540 kg + 500 kg = 1 040 kg

Degré de difficulté 3

En utilisant 2000 kilogrammes d'argent et 120 kilogrammes d'or, combien de médailles d'or et d'argent peut-on fabriquer ?

Plusieurs procédures de résolutions sont possibles, nous vous en proposons une qui considère la masse totale de l'or à utiliser pour déterminer la masse de médailles d'or que l'on peut fabriquer. Nous nous appuierons sur les taux de répartition et les coefficients de proportionnalité traduits par des écritures fractionnaires.

Il peut aussi être envisagé de travailler à partir de la masse d'une médaille d'or, d'en déduire la composition en or pour aboutir au nombre de médailles d'or que l'on peut fabriquer avec les 120kg d'or disponibles au départ.

Il s'agit ici d'un problème à plusieurs étapes relevant de structures multiplicatives **et** additives.

Les élèves peuvent mettre en œuvre ces différentes étapes qui ont des étapes intermédiaires :

1- Etant donné qu'il n'y a de l'or que dans les médailles d'or, les élèves doivent d'abord considérer les 120 kilogrammes d'or. Ce qui permettra de **déterminer le nombre de médailles d'or** réalisables :
   - Avec 120 kilogrammes d'or on peut fabriquer 1200 kilogrammes de médailles d'or puisque ces médailles sont constituées d'1/10ème d'or :

Les élèves de sixième pourront utiliser un tableau de proportionnalité :

masse	120 kg d'or	1200kg de médailles
Taux de composition	1/10	10/10

- 1200 kilogrammes de médailles d'or représentent 2000 médailles d'or puisque chaque médaille pèse 0,6 kg (1200kg/0,6kg = 2000)

2- Ensuite, il s'agit pour les élèves de déterminer, par un calcul, **la masse d'argent** nécessaire pour fabriquer ces 2000 médailles d'or : 2000 médailles d'or représentent 1200 kilogrammes de médailles d'or.

En utilisant le taux de répartition de la matière nécessaire pour fabriquer des médailles d'or, on lit qu'1/10ème de la masse totale est composée d'or, et 9/10ème d'argent.

Ces 1200kg de médailles d'or seront donc constitués de 1080kg d'argent.

<u>Explication</u> : 1200kg-120kg=1080kg

1200kg de médailles d'or dont 120kg d'or et 1080kg d'argent pour les fabriquer.

3- Une fois que les élèves ont déterminé le nombre de médailles d'or à réaliser et la masse d'or et d'argent nécessaires pour cela, ils doivent **calculer le nombre de médailles d'argent** <u>réalisables avec la masse d'argent qu'il reste.</u>
  - Calculer la masse d'argent encore disponible : Au départ, il y avait 2000kg d'argent disponible. 1080kg ont été utilisés pour fabriquer les médailles d'or. Il reste donc 920kg d'argent pour constituer les médailles d'argent : **2000kg-1080kg=920kg**
  - Calculer le nombre de médailles d'argent que l'on peut fabriquer avec 1kg d'argent : chaque médaille d'argent a une masse de 500 grammes. Les médailles d'argent sont constituées à 100% d'argent.
    Deux médailles d'argent pèsent donc 1 kilogramme (500g x 2 = 1000g = 1 kg).
  - Calculer le **nombre de médailles d'argent** réalisables avec la masse d'argent disponible : 920kg / 0,5kg = 1840. [ou 920kg x 2 = 1840kg, car avec 1kg d'argent on peut fabriquer 2 médailles, avec 920kg d'argent on peut fabriquer 1840 médailles]

PARA TRIATHLON - PTS4 Homme

Le para triathlon se déroule en 5 phases ou étapes: 3 phases de course (natation, cyclisme, course à pied) et 2 phases de transition afin de changer d'équipement. Les temps de ces 5 phases sont indiqués en minutes et secondes.

Les élèves vont ici être amenés à lire un tableau de classement et à résoudre des problèmes impliquant des calculs dans un système sexagésimal.

Il faudra remarquer que la notation des durées dans le tableau 01:19 équivaut à 01min et 19s.

Attendus de fin de cycle 3

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux
*Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions
*Déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant et d'une durée. Connaître et utiliser les unités de mesure des durées et leurs relations.

- Unités de mesures usuelles : jour, semaine, heure, minute, seconde, dixième de seconde, mois, année, siècle, millénaire.

*Résoudre des problèmes en exploitant des ressources variées (horaires de transport, horaires de marées, programmes de cinéma ou de télévision, etc.).

Degré de difficulté 1
Lequel de ces participants a gagné la médaille d'or ? Justifie ta réponse.

Ce premier défi implique une bonne lecture du tableau pour en extraire les informations pertinentes.
Les élèves pourraient certes, additionner pour chaque coureur les temps des 5 étapes, mais cette stratégie serait fastidieuse.
Ici, il suffit de remarquer, en comparant les durées, que le dossard 424 réalise le temps minimum sur chacune des 5 étapes pour en déduire qu'il gagne la compétition.

Degré de difficulté 2

Quel temps l'athlète japonais a-t-il mis pour terminer l'épreuve ?

Les élèves vont devoir repérer la ligne qui concerne l'athlète Japonais. Pour cela, l'enseignant pourra leur fournir un document avec les drapeaux des différents pays.

427	Hideki Uda	JPN 	*12:52*	*01:11*	*30:30*	*00:52*	*18:20*

Le défi nécessite d'additionner les durées des 5 phases de la course de l'athlète japonais, ce qui aboutit à un résultat en minutes et secondes, mais avec un nombre de secondes supérieur à 60. Il faut convertir ces secondes en minutes afin d'indiquer le temps global réalisé par le japonais.

Calcul total

12min 52s + 01min 11s + 30min 30s + 52s + 18min 20s = 61min 165s

<u>Conversion de 165 secondes en minutes</u>

On cherche dans 165s combien de fois on a 60 secondes.
Sans poser la division euclidienne, on peut chercher dans le répertoire multiplicatif de la table de 60 : 60x2=120. Donc 165s = 120s + 45s = 2min + 45s

L'athlète met donc 63 min 45s pour terminer sa course. Dans le tableau ce temps serait noté sous la forme 63 : 45. On peut donc accepter la réponse en minutes/secondes ou demander aux élèves de la donner en heures/minutes/secondes, ce qui aboutirait à **1h 3min et 45s**, noté 01 : 03 : 45 dans le tableau.

<u>Remarque sur la présence des unités dans les différents calculs</u>
La ressource Eduscol <u>« Grandeurs et mesures au cycle 3 »</u> rappelle qu' « il est tout à fait pertinent de faire figurer les unités dans les calculs. Cela aide les élèves à s'assurer qu'ils effectuent des additions ou des soustractions sur des mesures données dans la même unité et les encourage le cas échéant à gérer mentalement les conversions en présentant leurs calculs en ligne. »

Concernant la modélisation par une division « partage » ou « partition » (recherche de la valeur d'une part) du problème « *J'ai un ruban de longueur 35 cm, et je le coupe en 7 morceaux de même longueur, de quelle longueur seront ces morceaux ?* », les écritures 35 cm : 7 cm = 5 et 35 cm ÷ 7 = 5 cm sont bien plus parlantes que l'écriture « sans unités » 35 ÷ 7 = 5, où ce dont on parle n'est pas indiqué.

« Les écritures avec les unités permettent également de renforcer le sens des unités produits.
Par exemple, pour le calcul de l'aire d'un rectangle du type 3 cm × 4 cm, les élèves proposent souvent le résultat 12 cm. On peut justifier l'unité produit par exemple de la façon suivante :

Aire du rectangle = 3 cm × 4 cm = 3 × 1 cm × 4 × 1 cm = 12 × (1 cm × 1 cm) = 12 × 1 cm2 = 12 cm2. »

<u>Degré de difficulté 3</u>

Etablis le classement général de cette épreuve de Para triathlon.

Pour établir ce classement il faut d'abord (en se référant aux explications du défi de degré de difficulté 2) calculer la durée totale de la course de chaque athlète (voir tableau ci-contre), puis comparer les 8 durées.

Dossard	Pays	Durée de la course
421	ESP	64:24
422	CRO	65:49
423	R.U	68:11
424	FRA	59:58
425	E.U	69:12
426	E.U	66:28
427	JPN	63:45
428	RPC	70:19
429	CHN	64:54
430	BRA	67:57

<u>Classement complet</u> :

CLASSEMENT	Dossard	Pays	Durée
1er	424	FRA	59:58
2ème	427	JPN	63:45
3ème	421	ESP	64:24
4ème	429	CHN	64:54
5ème	422	CRO	65:49
6ème	426	E.U.	66:28
7ème	430	BRA	67:57
8ème	423	R.U.	68:11
9ème	425	E.U.	69:12
10ème	428	RPC	70:19

Degré de difficulté 4

Le classement serait-il le même si on ne tenait pas compte des temps de changement d'équipement ?

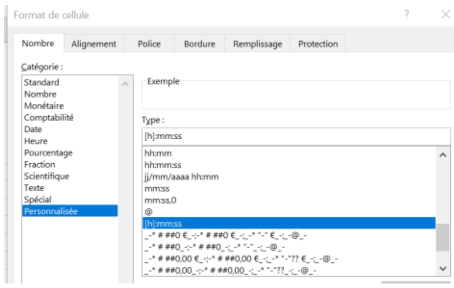
Refaire les calculs sans tenir compte des temps de changement

Ce défi peut être l'occasion d'**introduire l'outil numérique** en initiant les élèves à l'utilisation d'un tableur pour effectuer un **calcul instrumenté**. En effet, « dans les situations de calculs répétitifs (tests, essais, ajustements), les instruments technologiques (calculatrice, **tableur**, logiciels) se révèlent pertinents. L'utilisation de ces outils nécessite un apprentissage spécifique qui doit se faire de manière progressive. » (Le calcul aux cycles 2 et 3)

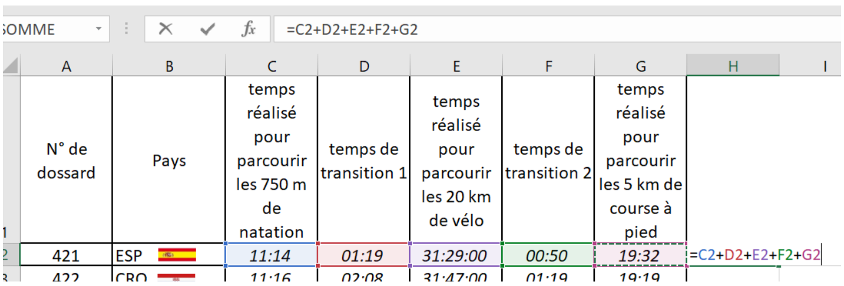
Dossard	Pays	Durée de la course	Durée de la course SANS LES CHANGEMENTS
421	ESP	64:24	62:15
422	CRO	65:49	62:22
423	R.U	68:11	65:42
424	FRA	59:58	58:09
425	E.U	69:12	66:54
426	E.U	66:28	63:49
427	JPN	63:45	61:42
428	RPC	70:19	68:03
429	CHN	64:54	62:34
430	BRA	67:57	65:51

Comment s'y prendre ?

(D'autres propositions de mise en œuvre sont possibles)



1) Télécharger la version Excel du tableau
2) Ajouter en (H, 1) l'intitulé de la nouvelle colonne (ex : Durée de la course)
3) Sélectionner les cases de (H, 2) à (H,11) pour modifier le format de ces cellules (onglet Accueil > Nombre > Personnalisé > [h]:mm:ss)
4) Entrer la formule pour calculer le total des 5 temps :
   - Se placer dans la colonne (H,2)
   - Taper « = » puis sélectionner (clic souris) chaque cellule composant les termes de la somme en les séparant par « + »



SOMME =C2+D2+E2+F2+G2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	N° de dossard	Pays	temps réalisé pour parcourir les 750 m de natation	temps de transition 1	temps réalisé pour parcourir les 20 km de vélo	temps de transition 2	temps réalisé pour parcourir les 5 km de course à pied		
2	421	ESP	11:14	01:19	31:29:00	00:50	19:32	=C2+D2+E2+F2+G2	
3	422	CRO	11:16	02:08	31:47:00	01:19	19:19		

- Appuyer sur « Entrée » pour valider La valeur
- Pour reproduire la formule dans les cellules du dessous, on utilise la poignée de recopie. 

  Cliquer sur la cellule (H,2) pour la sélectionner et placer le curseur dans le coin inférieur droit jusqu'à ce qu'il se change en signe plus (+).
- Faire glisser la poignée de recopie vers le bas, sur les cellules à remplir.
- Relâcher le clic : la formule est appliquée automatiquement aux autres cellules.