Document d'accompagnement n°1 à destination des enseignants

- - + - + - -

« En attendant la semaine des maths : Mettons en scène les Mathématiques »

Les déménageurs : Mater

En référence aux programmes de la maternelle :

2. Une école qui organise des modalités spécifiques d'apprentissage
    - Apprendre en jouant
    - Apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes
    - Apprendre en s'exerçant

4. Construire les premiers outils pour structurer sa pensée
    - Evaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.

      Etudier les nombres :
    - Parler des nombres à l'aide de leur décomposition
    - Lire les nombres en chiffres jusqu'à 10

Déroulement possible d'une séance avec étayage de l'enseignant

Les enseignants ont le choix entre trois supports correspondants à trois niveaux de difficulté

- Niv 1 : support proposant des ballons sans valeur et sans couleur
- Niv 2 : support proposant des ballons de 2 couleurs de 2 valeurs
- Niv 3 : support proposant des ballons de 3 couleurs de 3 valeurs

Difficultés liées à la situation

Les élèves peuvent rencontrer des difficultés à déterminer l'équipe gagnante car c'est l'équipe qui a le moins de ballons (niveau 1) ou le moins de points (niveaux 2 et 3) qui a gagné.

Premier temps

En collectif

- **Objectif** : Permettre aux élèves de s'approprier la situation.
- En motricité, jouer au jeu des « déménageurs ».
- **Matériel** : ballons, 2 caisses, 1 banc, des dossards
- **But du jeu** : Vider la caisse de son équipe en renvoyant les ballons dans le camp adverse. Prendre un seul ballon à la fois.
- **Règle du jeu :** Au départ du jeu, les ballons sont répartis entre deux équipes (dans les caisses).
  Le temps de jeu est géré par l'enseignant ou par les enfants (sablier/ chronomètre)
  Au signal du début de jeu : envoyer les ballons dans le camp adverse.
  Au signal de fin de jeu : poser les ballons dans les caisses.
  L'équipe qui a le moins de ballons (niveau 1) ou le moins de points (niveaux 2 et 3) a gagné.

Deuxième temps

Reprise du jeu mais on attribue des points en fonction de la couleur du ballon :

- Ballon rouge = 1 point
- Ballon bleu = 2 points

Cette nouvelle règle est présentée aux élèves (panneau)

Les élèves jouent. A la fin du jeu, les deux caisses sont ramenées en classe. En regroupement ou ateliers, on demande aux élèves de comptabiliser les points de chaque équipe.

Problème posé : Quelle équipe a gagné ?

On laisse les élèves proposer des stratégies (dessiner les ballons, dessiner les points, compter les points, écrire les chiffres…).

Troisième temps

Même situation que dans le deuxième temps mais avec l'utilisation d'un troisième ballon :

- Ballon rouge = 1 point

- Ballon bleu = 2 points
- Ballon vert = 3 points

Retour en classe

Proposition des défis maths. Résolution par groupe / sur affiche.

Mise en commun/ retour sur les stratégies.

Adaptations / différenciation

- Ballons de deux couleurs
- Nombre de ballons
- Valeur des ballons

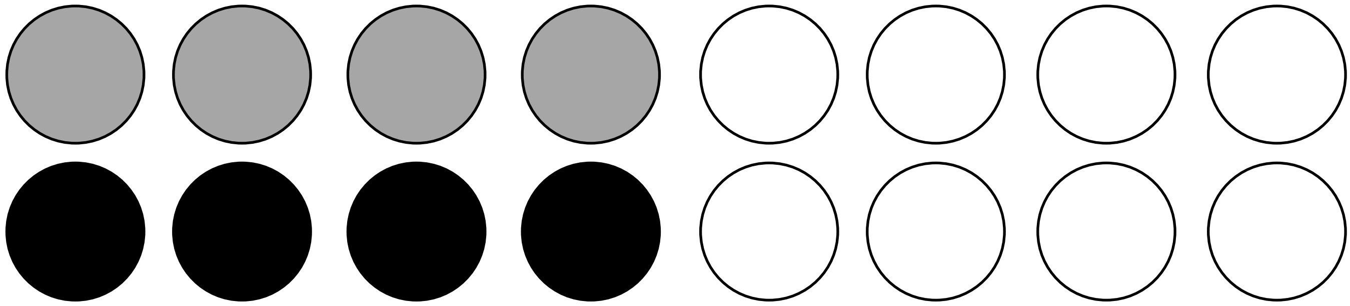
Solutions

Degré de difficulté 1 → Aucune des deux équipes ne gagne car elles ont récupéré le même nombre de ballons (7 ballons pour l'équipe A et 7 ballons pour l'équipe B)
Degré de difficulté 2 → C'est l'équipe A qui gagne car le nombre de ballons et la somme des points des ballons tombés dans son camp (9 points) est inférieure à celle de l'équipe B (10 points).
Degré de difficulté 3 → C'est l'équipe B qui gagne car, bien que le nombre de ballons récupérés par les deux équipes, la somme des points des ballons tombés dans son camp (9 points) est inférieure à celle de l'équipe A (10 points).

Outils d'aide

Tu peux dessiner pour t'aider à trouver la réponse.

Equipe A	**Equipe B**



Fair-Play (Cycle 2 et 3)

Descriptif :

Il s'agit d'un problème qui amène la formulation d'une conjecture et la production de preuve. C'est un problème qui propose différentes stratégies de résolution *(cf les différentes stratégies de résolution en annexe)*. Ce problème correspond aux problèmes de type « les rangements de livres sur une étagère, les dispositions de personnes autour d'une table… » qui permettent aux élèves d'approcher l'analyse combinatoire.

Compétences mobilisées (en référence aux programmes)

Chercher — Domaines 2 et 4 du socle

- S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.
- Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur

Modéliser — Domaines 1, 2 et 4 du socle

- Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures.
- Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives.

Représenter — Domaines 1 et 5 du socle

- Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).
- Utiliser des nombres entiers et des fractions pour représenter des quantités.

Raisonner — Domaines 2, 3 et 4 du socle

- Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul.
- Tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, sources internes ou externes à la classe, etc.) pour modifier son jugement.
- Prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce que l'on affirme.
- Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Calculer — Domaine 4 du socle

- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.

Communiquer — Domaines 1 et 3 du socle

- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.

Descriptif :

Il s'agit d'un problème qui amène la formulation d'une conjecture et la production de preuve. C'est un problème qui propose différentes stratégies de résolution *(cf les différentes stratégies de résolution en annexe)*. Ce problème correspond aux problèmes de type « les rangements de livres sur une étagère, les dispositions de personnes autour d'une table… » qui permettent aux élèves d'approcher l'analyse combinatoire.

Difficultés liées à ce défi :

- Communs à tous les niveaux : l'élève doit prendre en compte le fait qu'un joueur ne se serre pas la main lui-même ainsi que le dernier joueur qui lui, a serré la main de tous les autres.
- Pour les niveaux supérieurs, l'élève doit également prendre en compte le nombre total d'arbitres dont le nombre n'est pas toujours mentionné dans l'énoncé. Pour les cycle 3, seule, la représentation du terrain permet d'en déterminer le nombre.

Prenons l'exemple du 1er défi du cycle 3

Le premier joueur serre la main aux 15 autres, cela représente 15 poignées de main. Le second joueur a déjà serré la main au premier, il ne lui reste donc que 14 poignées de main à donner…etc …jusqu'au dernier joueur qui a déjà serré la main à toutes les personnes.

On multiplie donc le nombre de poignées de main possible (n – 1) par la moitié du nombre de personnes. La situation peut se représenter mathématiquement par l'opération suivante :

$$\frac{n}{2} \times (n - 1) \text{ ou } \frac{n^2-n}{2}$$

Pour 16 personnes qui se serrent la main, nous avons donc :

$\frac{16}{2} \times (16 - 1)$ ou $\frac{16^2-16}{2}$ soit **8 x 15 = 120** ou $\frac{256-16}{2}$ = **240 : 2** = **120**

Pour les élèves, l'utilisation de l'addition sera privilégiée: 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **120 poignées de main.**

Déroulement possible d'une séance avec étayage de l'enseignant

En amont

Le Fair-Play : qu'est-ce que c'est ? Déterminer avec l'ensemble de la classe dans quel cadre nous parlons de fair-play ou d'esprit sportif. Qui cela concerne-t-il ? les joueurs, les supporters…

Faire vivre la situation aux élèves, en EPS : placer une moitié de classe en cercle et demandez aux élèves de se serrer la main. L'autre moitié observe, relève le nombre de poignée de main (associé un acteur à un observateur). Pour marquer la fin d'un tour, l'élève qui a serré les mains, s'assoit. Le second procède de la même façon en ne serrant la main qu'aux élèves debout.

Pendant le défi

Phase 1 : Comprendre la situation-problème

- Lecture du problème. Explicitation du contexte. Retour oral sur la situation vécue préalablement.
- L'enseignant fait reformuler les données du problème par les élèves : « Que sait-on ? », « Que cherche-ton ? » Il s'assure que toutes les données sont explicitées *(cf. difficultés)*

Phase 2 :

Recherche individuelle avec explicitation du choix de la représentation du problème en fonction de la difficulté (*cf les différentes stratégies de résolution*) et confrontation des choix dans le groupe.

Mise en place du plan de travail : un temps de recherche individuel suivi d'un temps de recherche de groupe pour chaque groupe. Lors de la recherche individuelle, le maître passe dans les rangs et propose une ou des organisations possibles de représentation à ceux qui bloquent.

Lors de la recherche de groupe, l'enseignant passe dans les groupes pour repérer les éventuels obstacles, aide à la reformulation. Il demande aux élèves de comparer leurs réponses et d'expliciter leur(s) stratégie(s). Il questionne et fait vérifier la cohérence des réponses individuelles et propose à de statuer sur une réponse commune.

Phase 3 :

Demander aux élèves d'écrire leur réponse en explicitant leur démarche.

Des erreurs ou questionnements possibles

- Gêne occasionnée par la *formulation du sujet* : l'emploi de la première personne du singulier dans la première phrase tandis que la question concerne l'ensemble des joueurs.
- Oublie possible du retrait des « doublons » ; leur proposer d'appliquer le même raisonnement avec 4 personnes (un groupe propose 12, un autre 16) avec réalisation possible de l'expérience.
- L'explicitation du raisonnement.
- Questionnement autour de la prise en compte des remplaçants et du nombre d'arbitres.
- Non utilisation de la représentation pour le cycle 3.

Des prolongements possibles

- Les élèves peuvent être amener à ré exploiter les stratégies mises en place avec les autres défis.
- Vous pouvez les faire réfléchir sur un nombre inférieur ou supérieur de joueurs, en tenant compte des remplaçants, des arbitres, le nombre d'élèves de l'école ou du collège… pour mettre en avant la règle établie. Vous pouvez trouver des informations concernant le nombre de joueurs dans chaque fédération de sport. Il nous est impossible d'établir une liste exhaustive pour tous les sports.
- Vous pouvez également travailler dans le cadre de l'Enseignement moral et civique autour des règles de Fair-play dans le sport, mais également en tant que supporter…

Solutions

Cycle 2

NIv 1 :
Le premier joueur serre la main aux trois autres et à l'arbitre, ce qui représente quatre poignées de main.
Le second joueur a déjà serré la main au premier, il ne lui reste donc que trois poignées de main à serrer.
Le troisième serre la main au quatrième et à l'arbitre, ce qui fait deux poignées de main.
Le quatrième serre la main à l'arbitre, donc une poignée de main supplémentaire.
L'arbitre a serré la main à tous les autres joueurs.
Il y aura donc 10 poignées de main.
Dans le cas présent on peut donner l'opération suivante : 4 + 3 + 2 + 1 = 10

Niv 2 : Si on part du principe que tous les joueurs et les deux arbitres se serrent la main (soit 10 joueurs et 2 arbitres), il y a donc 12 personnes qui se serrent la main pour 11 poignées de main.
Pour les élèves, l'utilisation de l'addition est requise : 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **66 poignées de main.**

Si on part du principe que les arbitres ne se serrent pas la main entre eux alors on retire une poignée de main soit **65 poignées de main**.

Niv 3 : Pour 16 personnes, on prend la moitié de 16 soit 8 qu'on multiplie par le nombre de poignées de main possible soit 15 => 8 x 15 = 120 poignées de main.
Pour les élèves, l'utilisation de l'addition est requise : 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **120 poignées de main.**

Cycle 3

NIv 1 :
Pour 16 personnes, on prend la moitié de 16 soit 8 qu'on multiplie par le nombre de poignées de main possible soit 15 => 8 x 15 = 120 poignées de main.
Pour les élèves, l'utilisation de l'addition est requise : 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **120 poignées de main.**

Niv 2 : Pour 26 personnes, on prend la moitié de 26 soit 13 qu'on multiplie par le nombre de poignées de main possible soit 25 => 13 x 25 = 325 poignées de main.
Pour les élèves, l'utilisation de l'addition est requise : 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **325 poignées de main.**

Niv 3 : Pour 33 personnes, on prend la moitié de 33 soit 16,5 qu'on multiplie par le nombre de poignées de main possible soit 32 => 16.5 x 32 = 528 poignées de main.
Pour les élèves, l'utilisation de l'addition est requise : 32 + 31 + 30 + 29 + 28+ 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **528 poignées de main.**

Cycle 2 et 3

Niv 4 : La réponse au dernier défi est variable selon l'effectif de la classe ou selon les dispositifs spécifiques (CP ou CE1 à effectifs réduits, CP ou CE1 avec deux enseignants dans la classe, ULIS, UPEAA, 6ème SEGPA…). Les solutions sont présentées dans le tableau suivant.

Nombre d’élèves et d’enseignants dans la classe	calculs	Nombre de poignées de main
10	9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 ou 5 x 9	45
11	10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 ou 5,5 x 10	55
12	11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 ou 6 x 11	66
13	12 +11 + ….. + 3 + 2 + 1 ou 6,5 x 12	78
14	13 + 12 + 11 + … + 3 + 2 + 1 ou 7 x 13	91
15	14 + 13 + …. + 2 + 1 ou 7,5 x 14	105
16	15 + 14 + …. + 2 + 1 ou 8 x 15	120
17	16 + 15 + …. + 2 + 1 ou 8,5 x 16	136
18	17 + 16 + …. + 2 + 1 ou 9 x 17	153
19	18 + 17 + …. + 2 + 1 ou 9,5 x 18	171
20	19 + 18 + …. + 2 + 1 ou 10 x 19	190
21	20 + 19 + …. + 2 + 1 ou 10,5 x 20	210
22	21 + 20 + …. + 2 + 1 ou 11 x 21	231
23	22 + 21 + …. + 2 + 1 ou 11,5 x 22	253
24	23 + 22 + …. + 2 + 1 ou 12 x 23	276
25	24 + 23 + …. + 2 + 1 ou 12,5 x 24	300
26	25 + 24 + …. + 2 + 1 ou 13 x 25	325
27	26 + 25 + …. + 2 + 1 ou 13,5 x 26	351
28	27 + 26 + …. + 2 + 1 ou 14 x 27	378
29	28 + 27 + …. + 2 + 1 ou 14,5 x 28	406
30	29 + 28 + …. + 2 + 1 ou 15 x 29	435
31	30 + 29 + …. + 2 + 1 ou 15,5 x 30	465
32	31 + 30 + …. + 2 + 1 ou 16 x 31	496
33	32 + 31 + …. + 2 + 1 ou 16,5 x 32	528
34	33 + 32 + …. + 2 + 1 ou 17 x 33	561
35	34 + 33 + …. + 2 + 1 ou 17,5 x 34	595
36	35 + 34 + …. + 2 + 1 ou 18 x 35	630

Stratégies pouvant être mises en jeu dans la résolution du problème Fair-Play

***Exemple de stratégies : «** Douze enfants s'échangent des poignées de main, chacun à chacun une seule fois. Combien y a-t-il de poignées de main ? »*

Démarche. Voici 16 stratégies :

Stratégie 1. Écrire une phrase mathématique. **Stratégie d'application** Le 1er enfant donne 11 poignées, le 2^{e} en donne 10, le 3^{e} en donne 9, etc. La phrase mathématique est : 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66. Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 2. Utiliser une formule. **Stratégie d'application** Soit n le nombre d'enfants et m le nombre de poignées, la formule est : $m = n(n - 1)/2$. Si $n = 12$, alors $m = 12 \times 11 \div 2 = 66$. D'où, 66 poignées.

Stratégie 3. Faire une fausse supposition. **Stratégie d'enchaînement logique** On suppose que chaque enfant reçoit 12 poignées de main : ce qui ferait 12 × 12 ou 144 poignées. Un enfant ne peut pas se donner la main. D'où, 144 - 12 = 132 poignées. Deux mains tendues équivalent à une poignée. D'où, 132 ÷ 2 = 66 poignées.

Stratégie 4. Procéder par analogie. **Stratégie d'enchaînement logique** Un élève a déjà résolu le problème : « Huit enfants s'échangent mutuellement des cadeaux. Combien de cadeaux ont été donnés ? » Il avait fait le raisonnement suivant. Chacun des 8 enfants reçoit 7 cadeaux : ce qui fait 8 × 7 = 56 cadeaux. Si l'élève a bien évoqué le problème des poignées, il divisera le produit par 2, car il faut 2 mains pour définir une poignée. Il va donc multiplier 12 par 11 et diviser le résultat par 2 : ce qui donne 66 poignées.

Stratégie 5. Procéder par déduction. **Stratégie d'enchaînement logique** Chaque enfant donne 11 poignées. Chaque enfant en reçoit 2. On multiplie 12 par 11 et on divise par 2. Il y a 66 poignées.

Stratégie 6. Utiliser des jetons. **Stratégie d'expression physique** On prend 12 jetons. On y écrit 12 noms d'enfants. Pour éviter les erreurs, on procède de façon ordonnée en utilisant le comptage et le calcul. On place les jetons en ligne. On associe le premier jeton à chacun des 11 autres : cela fait 11 contacts. On associe le deuxième jeton à chacun des dix autres de droite : cela fait 10 contacts. On procède selon le même algorithme jusqu'à l'avant-dernier jeton. Il reste à faire la somme des entiers consécutifs de 1 à 11. Il y a 66 contacts ou poignées.

Stratégie 7. Utiliser des objets. **Stratégie d'expression physique** Les objets représentent les enfants. On place les objets en ligne. On procède comme dans la stratégie précédente.

Stratégie 8. Vivre la situation en gestes. **Stratégie d'expression physique** On place 12 enfants en ligne.

On demande au 1er enfant de donner une poignée à chacun. On procède comme dans les deux stratégies précédentes. On pourrait aussi demander à chaque enfant de la file de compter le nombre de poignées qu'il reçoit. Le 2e enfant en reçoit 1, le 3e en reçoit 2 et ainsi de suite.

Stratégie 9. Consulter une table. **Stratégie de recherche** Un élève a noté que le nombre de poignées, quand il y a 2, 3, 4, 5, ... enfants, était un nombre triangulaire dont le rang correspond au nombre d'enfants moins l'unité. Il consulte la table des nombres triangulaires et trouve que le 11e nombre triangulaire est 66.

Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 10. Rechercher les combinaisons. **Stratégie de recherche** Les enfants sont notés de A à L. On écrit les combinaisons : (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (A, G), (A, H), (A, I), (A, J), (A, K), (A, L), (B, C),

(B, D), (B, E), etc. On en a 11 qui commence par A, 10 par B, 9 par C, ... etc. Cela donne 66 poignées.

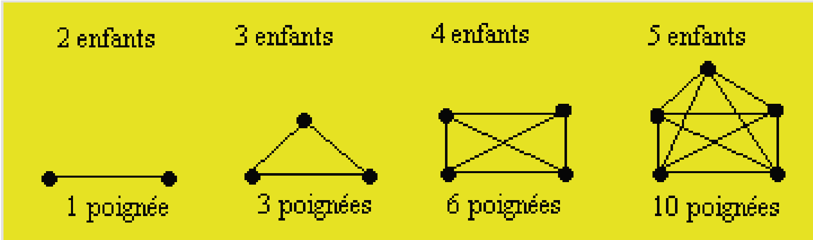
Stratégie 11. Rechercher une formule. **Stratégie de recherche** On pose qu'il y a n enfants. Chacun donne

$(n - 1)$ poignées de main. Cela va donner $n(n - 1)$ poignées. Quand un enfant donne et l'autre reçoit, cela compte pour une poignée. Le nombre de poignées est 2 fois trop grand. D'où, il y a $n(n - 1)/2$ poignées. En remplaçant n par 12, on obtient 66.

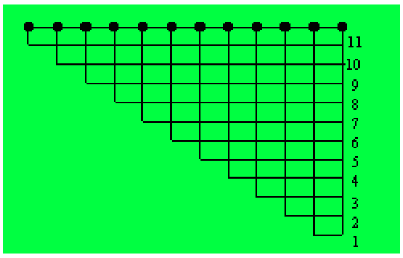
Stratégie 12. Rechercher une règle. **Stratégie de recherche** Par exemple, il y a 3 enfants. Chaque enfant donne et reçoit 2 poignées : ce qui fait (3 × 2)/2 ou 3 poignées. Par exemple, il y a 4 enfants. Cela fait (4 × 3)/2 ou 6 poignées. Par exemple, il y a 6 enfants. Cela fait (6 × 5)/2 ou 15 poignées. S'il y a 12 enfants, on peut écrire (12 × 11)/2 ou 66 poignées.

Stratégie 13. Construire des modèles.

Stratégie de représentation On trouve le nombre de poignées successivement pour 2, 3, 4 et 5 enfants.



La différence entre le nombre de poignées du 2e diagramme et du 1er est 2. La différence entre le nombre du 3e diagramme et du 2e est 3. La différence entre le nombre du 4e diagramme et du 3e est 4. À chaque fois qu'un enfant s'ajoute, le nombre de poignées augmente du nombre précédent d'enfants. D'où, les autres termes de la suite seront : 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66. Il y a 66 poignées de main.



Stratégie 14. Construire un graphique. **Stratégie de représentation** Chaque enfant est représenté par un point. Les points d'intersection représentent les poignées de main. Il reste à additionner les nombres de 1 à 11. Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 15. Construire un tableau. **Stratégie de représentation**

Enfants	2	3	4	5	6
Poignées	1	3	6	10	15

Pour 2 enfants, le nombre de poignées de main est 1. Pour 3 enfants, ce nombre est 1 + 2. Pour 4 enfants, ce nombre est 1 + 2 + 3. Pour 5 enfants, ce nombre est 1 + 2 + 3 + 4. Pour 12 enfants, il sera : 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10 + 11 = 66.

Stratégie 16. Décomposer en sous-problèmes **Stratégie de représentation** On partage les enfants en deux groupes de six enfants. À l'intérieur de chaque groupe, 15 poignées sont données. Les enfants des deux groupes se donnent la main. Cela fait 6 × 6 = 36 poignées. Il y a (2 × 15 + 36) ou 66 poignées de main.

BON DÉFI